FONCTIONS POLYNOMES

FONCTIONS RATIONNELLES

1 Fonctions polynômes et factorisation

Exercices

1 *On considère l'application* f *de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *telle que* $x \mapsto -2x = f(x)$. *Calculer* $f(x)$ *si* $x \in \{0, \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{4}\}$.

Quel est l'ancêtre de 2, *de* 6 ? *Si* $f(x) = y$, *trouver* x *si* $y \in \{5, 7, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$. *Proposer une formule pour retrouver* x *si l'on donne* y.

2 *Si* g *est un application de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *telle que* $x \mapsto -1 = g(x)$, *trouver* $g(x)$ *pour* $x \in \{0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\}$.

4 *a-t-il un ancêtre? Quels sont les ancêtres de* -1 ? *Peut-on trouver* x *si* $g(x) = 0$?

3 *Si* h *est une application de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *telle que* $x \mapsto 3x^2$, *trouver* $h(x)$ *pour* $x \in \{1, -\frac{1}{3}, 2, -2\}$.

Trouver x *si* $h(x) = y$ *et* $y \in \{0, 3, -3, 12, 27\}$ *en utilisant le modèle suivant pour* $y = 75$.

$$3x^2 = 75 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \\ \text{ou} \\ x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{5, -5\}$$

4 *Les applications* f , g *et* h *étant celles des trois exercices précédents, si l'on pose* $j(x) = h(x) + f(x) + g(x) = 3x^2 - 2x - 1$, *alors* j *est une application polynôme de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *construite à l'aide des trois applications monômes* h, f *et* g. *Calculer* $j(x)$ *si* $x \in \{0, 1, -\frac{1}{3}, 2\}$. *Vérifier que* $(3x+1)(x-1) = 3x^2 - 2x - 1$ *et trouver* x *si* $j(x) = 0$.

Définition 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$, si f est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto ax^n = f(x)$, alors f s'appelle **application monôme de degré n.**

Définition 2 Si g est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto c = g(x)$, alors g s'appelle **application monôme constante de degré 0.**

Définition 3 Si h est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n = h(x)$, alors, si $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, h s'appelle **application polynôme de degré n.**

Définition 4 On appelle **racine d'une application** de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, un nombre dont l'image par cette application est nulle.

<u>Remarque</u>

Si f est une application polynôme, le nombre $f(x)$ s'appelle aussi **polynôme**.

<u>Exemple</u>

Si k est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto 4x^2 - 20x + 25 = k(x)$, alors k est une application polynôme de degré 2. A l'aide d'une factorisation, on trouve sa racine.

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{2}\}$$

Exercices

5 *Effectuer, réduire, ordonner et donner le degré de l'application polynôme f.*

1) $f(x) = (x+2)(x+3)$ 2) $f(x) = (2x+1)(x+2)$

3) $f(x) = (2x-3)(-x+1)$ 4) $f(x) = -(4-x)(2+3x)$

5) $f(x) = (x+a)(x+b)$ 6) $f(x) = (x+1)(x-1)+(x+1)^3$

7) $f(x) = (2x-1)^2-(3x+1)^3+x$ 8) $f(x) = 56(x+3)^3+17(x^3+1)+x$

9) $f(x) = (2x+1)^3-(3x-1)^2-8x^3$ 10) $f(x) = (x+1)(x-1)(2-x)(2+x)$

11) $f(x) = (2x-1)(3x+1)(2x+1)$ 12) $f(x) = -(x+1)(x+1)+x^2(3-x)+1$

6 *Résoudre les équations à l'aide d'une factorisation.*

1) $2x^2-x = 0$ 2) $x^4-x^2 = 0$ 3) $4x^3 = -2x^2$

4) $\frac{3}{4}x^3 = -\frac{x}{3}$ 5) $\frac{2}{3}x^2 = \frac{x}{4}$ 6) $\frac{2x^3}{5} = \frac{3x^2}{4}$

7 *Après factorisation du polynôme* $f(x)$*, trouver les racines de* f.

Exemple $f(x) = 4x^2-8x+4 = 4(x^2-2x+1) = 4(x-1)^2$

alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x \in \{1\}$

Autre exemple $f(x) = x^2-1 = (x+1)(x-1)$

alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ \text{ou} \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$

1) $f(x) = x^2+2x+1$ 2) $f(x) = 2x^2-32$

3) $f(x) = 8x^2-18$ 4) $f(x) = -9x^2+4$

5) $f(x) = -x^2-2x-1$ 6) $f(x) = -x^2+4x-4$

7) $f(x) = -x^2-6x-9$ 8) $f(x) = \frac{1}{4}x^2+2x+4$

9) $f(x) = \frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}$ 10) $f(x) = x^3+3x^2+3x+1$

11) $f(x) = 3x^3+18x^2+36x+24$ 12) $f(x) = 8x^3-12x^2+6x-1$

13) $f(x) = x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$ 14) $f(x) = \frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x-8$

15) $f(x) = 8x^3+36x^2+54x+27$ 16) $f(x) = -x^3+15x^2-75x+125$

17) $f(x) = x^4-1$ 18) $f(x) = x^4-81$

19) $f(x) = x^6-64$ 20) $f(x) = x^{12}-1$

21) $f(x) = x^3-8$ 22) $f(x) = -8x^3+1$

23) $f(x) = \frac{x^3}{27}+1$ 24) $f(x) = -16x^2+36$

25) $f(x) = x^9+3^9$ 26) $f(x) = x^5-\frac{x^2}{8}$

27) $f(x) = \frac{1}{27}-x-(x^3-x)$ 28) $f(x) = x^3-a^3$

8 *Calculer les racines des applications polynômes f suivantes.*

Exemple $f(x) = (x+1)(x+2) - 5(x+1)(2x+1) = (x+1)(x+2-5(2x+1))$

$= (x+1)(x+2-10x-5) = (x+1)(-9x-3) = -3(x+1)(3x+1)$

Alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ \text{ou} \\ 3x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1, -\frac{1}{3}\}$

1) $f(x) = 2x + x(x+1)$ 2) $f(x) = 3(x-2) + (x+3)(x-2)$

3) $f(x) = 2(2-x) - 2(2x+3)(x-2)$ 4) $f(x) = 3(x+3) + (x^2-9)$

5) $f(x) = 2(x-4) + 3(x^2-8x+16)$ 6) $f(x) = (x+1)^3 - (x^3+1)$

7) $f(x) = 2x + (3-2x)^2 - 3$ 8) $f(x) = (x-1)(3x+1) - x(x-1) + 2x(x-1)$

9) $f(x) = (\frac{1}{2} - x)^2 - (x - \frac{1}{2})$ 10) $f(x) = x^2 + 2x - (x+2)^2$

11) $f(x) = (x+3)^2 - 9$ 12) $f(x) = (2x-1)^2 - 4$

13) $f(x) = 25 - (x+2)^2$ 14) $f(x) = 36 - (4x^2 - 12x + 9)$

15) $f(x) = 21 - x^2 - 4x$ 16) $f(x) = 27 - 4x^2 + 12x$

9 *Sur le modèle suivant, trouver les racines des applications polynômes.*

Si l'on compare $f(x) = (ax+b)(a'x+b') = aa'x^2 + ab'x + a'bx + bb' = aa'x^2 + (ab' + a'b)x + bb'$

et $f(x) = 6x^2 + 19x + 15$,

on peut poser $ab' + a'b = 19 = m + n$ *et* $ab' \cdot a'b = aa' \cdot bb' = 6 \cdot 15 = 90 = m \cdot n$.

En décomposant 90 *en un produit de deux facteurs dont la somme est* 19, *on obtient*

$m = 9$ *et* $n = 10$.

Alors $f(x) = 6x^2 + 19x + 15 = 6x^2 + 9x + 10x + 15 = 3x(2x+3) + 5(2x+3) = (2x+3)(3x+5)$.

Ainsi $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = 0 \\ \text{ou} \\ 3x+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-\frac{3}{2}; -\frac{5}{3}\}$

1) $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ 2) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

3) $f(x) = 6x^2 + 13x + 6$ 4) $f(x) = (x + \frac{1}{2})(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2})$

5) $f(x) = x^2 + 7x + 10$ 6) $f(x) = 3x^2 - x - 2$

7) $f(x) = x^2 + 7x + 12$ 8) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

9) $f(x) = x^3 - x^2 - 30x$ 10) $f(x) = -x^2 - 2x + 35$

11) $f(x) = 2x^2 + 6x - 108$ 12) $f(x) = -27 - 24x + 3x^2$

10 Résoudre les équations suivantes.

Exemple $\quad -\frac{1}{4}x^2+3x = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2-3x+9 = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-3 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6$

1)	$x^2+1 = -2x$	2)	$4x^2+1 = 4x$
3)	$4 = -9x^2+20$	4)	$\frac{1}{9}x^2+4 = -\frac{4}{3}x$
5)	$9x^2 = -6x-1$	6)	$x^3-3x^2 = -3x+1$
7)	$x^3-8 = 6x^2-12x$	8)	$\frac{1}{27}x^3+x = \frac{1}{3}x^2+1$

Algorithme de division

En arithmétique, on utilise la technique de division d'un nombre par un autre. Etant donnés deux entiers naturels a et $d \neq 0$, il existe exactement deux entiers naturels q et r, avec $r<d$, tels que $a = dq+r$. On a alors $\frac{a}{d} = q + \frac{r}{d}$.

Pour les polynômes, il existe une propriété analogue que l'on admettra sans démonstration.

THEOREME 1 Etant donnés $p(x)$ et $d(x)$ deux polynômes et $d(x) \neq 0$, il existe exactement deux polynômes $q(x)$ et $r(x)$, le degré de r étant strictement inférieur à celui de d, tels que $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$.

Pour déterminer les polynômes $q(x)$ et $r(x)$ on utilise un **algorithme de division** illustré par l'exemple suivant.

Si l'on donne $p(x) = 4x^4 - 2x^3 + 5x - 7$ et $d(x) = 2x^2 + 3$, on applique l'algorithme de la façon suivante.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +5x & -7 & 2x^2+3 \\
\cline{6-6}
-4x^4 & & -6x^2 & & & 2x^2-x-3 \\
\hline
& -2x^3 & -6x^2 & +5x & -7 & \\
& 2x^3 & & +3x & & \\
\cline{2-5}
& & -6x^2 & +8x & -7 & \\
& & 6x^2 & & +9 & \\
\cline{3-5}
& & & 8x & +2 &
\end{array}
$$

On obtient alors $q(x) = 2x^2 - x - 3$ et $r(x) = 8x + 2$, ce qui donne l'égalité suivante
$4x^4 - 2x^3 + 5x - 7 = (2x^2 + 3)(2x^2 - x - 3) + 8x + 2$. On peut aussi écrire (car $2x^2 + 3 \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\
x &\mapsto f(x) = \frac{4x^4 - 2x^3 + 5x - 7}{2x^2 + 3} = 2x^2 - x - 3 + \frac{8x + 2}{2x^2 + 3}
\end{aligned}
$$

Exercice 11

Effectuer la division et simplifier

1) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2}{x^2 + 1}$

2) $f(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$

3) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

4) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

Divisibilité par $(x - a)$

THEOREME 2 Pour qu'un polynôme soit divisible par $(x - a)$, il faut et il suffit que le nombre **a** soit racine de l'application polynôme.

$f(x) = (x - a)\,g(x) \Leftrightarrow f(a) = 0$ avec g de degré $n - 1$ si celui de f est n.

Division par la méthode de Horner

Cette méthode n'est valable que pour la division par $(x - a)$.

Voici un exemple.

$(2x^3 + x^2 - x + 10) : (x + 2)$

		2	1	-1	10 les coefficients du dividente
		$\downarrow$	+	+	+
			$-2\cdot 2$	$-2\cdot(-3)$	$-2\cdot 5$
l'opposé du nombre 2 :	-2	2	-3	5	0 = reste de la division

alors 2 , -3 et 5 sont les coefficients du quotient et

$(2x^3 + x^2 - x + 10) : (x + 2) \;=\; 2x^2 - 3x + 5$

Exercices

12 *Vérifier que* a *est une racine de* f, *factoriser le polynôme et trouver ses autres racines dans les cas suivants.*

1) $a = 3$ et $f(x) = 2x^2 - x - 15$
2) $a = 1$ et $f(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$
3) $a = -1$ et $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$
4) $a = -3$ et $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{17}{4}x - 15$
5) $a = -2$ et $f(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$
6) $a = -1$ et $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
7) $a = 3$ et $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$
8) $a = 5$ et $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 22x - 15$

13 *Factoriser les polynômes suivants.*

1) $f(x) = 3x^2 - 14x - 5$
2) $f(x) = 2x^3 - 13x^2 - 24x$
3) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$
4) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$
5) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 10x + 12$
6) $f(x) = (x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2$

Voici la marche à suivre pour factoriser un polynôme.

> Pour décomposer un polynôme en un produit de facteurs, on applique
>
> 1 la mise en évidence (distributivité)
>
> 2 les formules remarquables
>
> 3 les groupements et artifices (en vue de reprendre les points 1 ou 2)
>
> 4 la divisibilité des polynômes par $x - a$

Exercices

***14** Factoriser les polynômes et déterminer leurs racines.*

1)	$f(x) = (x-2)^2 - 16$	2)	$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x$
3)	$f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$	4)	$f(x) = x^2 - 8x + 15$
5)	$f(x) = (x^2+6)^2 - 25x^2$	6)	$f(x) = x^2 - 3$
7)	$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 \quad (x^2 = y)$	8)	$f(x) = x^8 - x^2y^6$
9)	$f(x) = x^2 - x - 6$	10)	$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
11)	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	12)	$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
13)	$f(x) = x^8 - 4x^6 - 2x^5 + 8x^3 + x^2 - 4$	14)	$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x$
15)	$f(x) = x^6 + 26x^3 - 27$	16)	$f(x) = x^4 - 20x^2 + 64$
17)	$f(x) = x^4 + x^2 + 1$	18)	$f(x) = x^8 + x^4 + 1$
19)	$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$	20)	$f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$
21)	$f(x) = x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 8x^3$	22)	$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2$

***15** Résoudre les équations paramétriques.*

Exemple

$$ax + b = c \quad \Leftrightarrow \quad ax = c - b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \text{ et } 0x = c - b \\ \text{ou} \\ a \neq 0 \text{ et } x = \dfrac{c-b}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \text{ et } \begin{cases} b = c \text{ et } 0x = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ b \neq c \text{ et } x \in \varnothing \end{cases} \\ \text{ou} \\ a \neq 0 \text{ et } \qquad x \in \left\{ \dfrac{c-b}{a} \right\} \end{cases}$$

1)	$(a+1)x = 2$	2)	$(3+a)x = 3x - 1$
3)	$(a+2)x = 0$	4)	$ax + 2 = b$
5)	$2b + 3x = (2+a)x$	6)	$(m+2)x = 3$
7)	$\dfrac{4x+8}{0.2} = \dfrac{mx}{0.8}$	8)	$\dfrac{1}{2}ax - 0.36 = 0$
9)	$0.45x - 0.27 = (m+1.66)x$	10)	$m^2(x-1) + 3(mx-2) = 5m - 2x$
11)	$m^2(x-1) + x = 2mx - 1$	12)	$\dfrac{x-a}{a} + \dfrac{x-b}{b} = 0$
13)	$\dfrac{x+a}{b} + \dfrac{x+b}{a} = -2$	14)	$\dfrac{x+1}{a^2} + \dfrac{x-1}{b^2} = \dfrac{2x}{ab}$
15)	$\dfrac{a}{b}(x-1) + 1 = \dfrac{b}{a}(1-x)$	16)	$(2a-1)(x-b) = a(x+b)$
17)	$\dfrac{2}{x^2+x} + \dfrac{m}{x-1} = \dfrac{m}{x}$	18)	$\dfrac{a}{x+1} - \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{a-b}{x^2-1}$

2 Les fonctions rationnelles

Le nombre $\frac{3}{5}$ s'appelle aussi quotient. On a $\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$.

Définition 5 Un **quotient** x est le produit d'un nombre par l'inverse d'un nombre.

$$x = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Exercice 16

5 *peut-il s'écrire comme le quotient de deux nombres? Même question pour* 0,2 ; -0,33 ; 428 ; 0 ; $0,\overline{3}$; $0,\overline{6}$; $1,\overline{3}$; $1,\overline{6}$; $0,\overline{142857}$.

Avec les éléments 0 et 1 de $\mathbb{R}$, on peut poser,

$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 1{+}1,\ 1{+}1{+}1, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N} \text{ ou } -x \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m}{n} \text{ et } (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$

Définition 6 f est dite **fonction rationnelle** si et seulement si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ et h et g sont deux applications polynômes.

Exercice 17

Théorème *Démontrer que la fonction rationnelle* $f = \frac{g}{h}$ *est une application si et seulement si* $h(x) \neq 0$.

Définition 7 L'ensemble des x de $\mathbb{R}$ ayant une image par une fonction rationnelle f s'appelle **domaine de définiton** de f, et se note Df.

Exemple

On donne $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6} = \dfrac{g(x)}{h(x)}$. Avec $h(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$,

on a $h(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, -3\}$. Ainsi $Df = \mathbb{R} - \{2, -3\}$.

Alors $f : \mathbb{R} - \{2, -3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6} = \frac{(x - 2)^2}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x - 2}{x + 3} = f(x)$$

et $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - 2}{x + 3} = 0$ et $x \in \mathbb{R} - \{2, -3\} \Leftrightarrow x - 2 = 0$ et $x \notin \{2, -3\}$

$\Leftrightarrow x = 2$ et $2 \notin Df \Leftrightarrow x \in \varnothing$

18 *Trouver le domaine de définition et calculer les racines de la fonction rationnelle* f.

1) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$

2) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{(1 + 2x)^2}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{6}{x}$

4) $f(x) = \dfrac{2}{4x - 1}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x}{x - 2}}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1} - \dfrac{3}{3x + 1}$

7) $f(x) = \dfrac{-x}{x + 5} + \dfrac{x}{7 + x}$

8) $f(x) = \dfrac{2 + x}{2 - x} + \dfrac{x + 3}{x - 3}$

9) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{2x + 1} + \dfrac{1 - x}{x + 1}$

10) $f(x) = \dfrac{-2x}{x + 2} - \dfrac{3 - 2x^2}{x^2 - 4}$

11) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{2}{x + 2}$

12) $f(x) = \dfrac{2x^2}{5 - x} - \dfrac{3x}{x - 5}$

13) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{5 - x}{x - 3} - \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$

14) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x - 2}}{\dfrac{3}{x + 4}}$

15) $f(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{3 - x}}{4} + \dfrac{\dfrac{9}{x + 3}}{6}$

16) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 4} - 2 + \dfrac{7x + 4}{7x + 8}$

17) $f(x) = \dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{3}{x + 1}$

18) $f(x) = \dfrac{2}{x + 2} - \dfrac{3}{(x + 2)(x - 1)}$

19) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{2x} - \dfrac{x - 5}{x + 3}$

20) $f(x) = \dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 3}$

21) $f(x) = \dfrac{1}{4x - 8} - \dfrac{x}{3x - 6} + \dfrac{2x - 1}{2x - 4}$

22) $f(x) = \dfrac{4}{(2x - 1)^2} - \dfrac{3}{4x^2 - 1}$

23) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + x - 2}$

24) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} + \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

25) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 8}{x^2 + 9x + 14} - \dfrac{8x^2 + 22x - 6}{4x^2 + 27x - 7}$

26) $f(x) = \dfrac{8x^3 - 1}{64x^6 - 1} - \dfrac{x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$

27) $f(x) = \dfrac{40x^3 - 5}{12x - 6} - \dfrac{20x^3 - 10x^2 - 5x - 5}{6x - 6}$

28) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} - \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

19 *Résoudre les équations selon le modèle suivant.*

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-3}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2) - (x-3)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2 - x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{(x+1)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) \neq 0 \text{ et } 3x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \notin \{-2, -1\} \text{ et } x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \{-\frac{1}{3}\}$$

1) $\dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{3x}{x+1}$ 2) $\dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{5}{x}$

3) $\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{x}$ 4) $\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{x+2}{2-x}$

5) $\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{x-2}{2-x}$ 6) $\dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{x-3}{x-9}$

7) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x^2+x}{(x+1)(x-1)}$ 8) $\dfrac{x^2-36}{(x-3)(x-6)} = \dfrac{x+6}{x-3}$

20 ***Théorème***

Pour toute suite de quotients égaux, toute combinaison linéaire des numérateurs forme avec la même combinaison linéaire non nulle des dénominateurs un nouveau quotient égal à chacun des précédents.

Démontrer le cas particulier $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = \dfrac{\alpha a + \beta c + \gamma e}{\alpha b + \beta d + \gamma f}$

21 *Une **proportion** est l'égalité de deux quotients. Dans la proportion* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, *a et d sont les termes extrêmes et b et c les moyens.*

Théorème 1 *Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Théorème 2 *Dans une proportion, on peut intervertir les extrêmes ou les moyens et l'on obtient une proportion équivalente.*

Théorème 3 *Si l'on a la proportion* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *alors on a aussi la proportion* $\dfrac{\alpha a + \beta b}{\gamma a + \delta b} = \dfrac{\alpha c + \beta d}{\gamma c + \delta d}$.

22 *Résoudre en appliquant le théorème 3 de l'exercice précédent.*

1) $\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{7}{3}$ 2) $\dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{1}{4}$ 3) $\dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{3}{8}$ 4) $\dfrac{2x-5}{3x+10} = \dfrac{1}{5}$

23 *Trouver le domaine de définition de la fonction rationnelle f, puis simplifier par division et calculer les racines.*

1) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 1}{2x - 1}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

3) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 3x - 5}{x^2 + x + 1}$ *indication* $x^2 + x + 1 = x^2 + 2\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$

$= (x + \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4}$

4) $f(x) = \dfrac{x^5 + 4x^4 - 21x^3 - x^2 - 4x + 21}{x^3 - 1}$

24 *Selon le modèle suivant, trouver tous les entiers ayant une image entière par* f .

Si $f(x) = \dfrac{4x - 5}{x}$, *alors* $f(x) = \dfrac{4x}{x} - \dfrac{5}{x} = 4 - \dfrac{5}{x}$. *Il faut et il suffit que* $\dfrac{5}{x}$ *soit un entier, ou que* x *soit un diviseur entier de* 5.

Alors $f(x) \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{1, 5, -1, -5\}$.

1) $f(x) = \dfrac{6x - 12}{x}$ 2) $f(x) = \dfrac{x + 9}{x + 1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2}x + 6}{1 - 2x}$ 4) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{2x + 1}$

3 Ordre et valeur absolue

Exercices

25 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$.

1) $1 + 3x \leq 6$ 2) $4x - 5 \leq 2x + 3$

3) $8x + 6 \leq 13x - 1$ 4) $\frac{1}{3}x + 1 \geq x$

5) $4 + \frac{2}{3}x \leq 7 - \frac{1}{2}x$ 6) $x(x + 1) \leq x^2 + 4$

7) $-1 \leq x^2 - 2x$ 8) $3x + 7 \leq 3x - \frac{1}{2}$

9) $5(x + 2) - x \geq 2x + m$ 10) $-12 \geq 3(x + m) - 4x$

11) $27(2x + 1) - 1 > 4(3x - 2)$ 12) $\frac{5}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x > 0$

13) $-7x - 8x - 9x > 0$ 14) $a^2x + 2 < -3x + 5$

15) $a^2x + 7x \leq 0$ 16) $5(x - 2) - 3x < 2x - 5$

26 *Justifier les équivalences.*

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ \text{et} \quad a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax > -b \\ \text{et} \quad a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} \\ \text{et} \quad a > 0 \end{cases}$$

Ainsi, avec $a > 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

$$\begin{cases} ax + b < 0 \\ \text{et} \quad a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax < -b \\ \text{et} \quad a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} \\ \text{et} \quad a < 0 \end{cases}$$

Ainsi, avec $a < 0$, $ax + b < 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

<u>Théorème</u>

Pour $a \neq 0$, a et $ax + b$ sont de même signe si et seulement si $x > -\dfrac{b}{a}$ la racine du binôme.

27 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *selon l'exemple suivant.*

$(2x + 3)(5x - 2) \geq 0$

1) *Trouver les racines de chaque facteur et les classer.*

$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ et $5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}$ et $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{2}{5}$

2) *Etudier le signe de chaque facteur.*

$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{3}{2}$ et $5x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{5}$

3) *Construire le tableau des signes.*

x		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{5}$	
$2x + 3$	-	0	+		+
$5x - 2$	-		-	0	+
$(2x + 3)(5x - 2)$	+	0	-	0	+

4) *Répondre à la question posée.*

$(2x + 3)(5x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -\dfrac{3}{2}] \cup [\dfrac{2}{5} ; +\infty[$

1)	$(x + 3)(x - 5) \leq 0$	2)	$(2 - x)(3 + x) \geq 0$
3)	$(1 - x)(1 + x) > 0$	4)	$(x + 1)^2 \geq 0$
5)	$4x^2 + 4x + 1 > 0$	6)	$x^2 + 9 \leq 6x$
7)	$x^2 - x < 2$	8)	$-(3 + x)(2x + 1) \geq 0$
9)	$(1 - 4x)(2 - 3x) > 0$	10)	$(x + 1)(x + 2)(x + 3) \geq 0$
11)	$x(x - 1)(x - 2) \leq 0$	12)	$(x + 1)(x^2 + 2x + 1) \geq 0$
13)	$(\frac{1}{2}x + 4)(5x + \frac{1}{2}) \geq 0$	14)	$(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4})(x^2 - 1) > 0$

15)	$(\frac{7}{8} - 3x)(x^2 - 4)$	$\leq$	0	16)	$x^3 - x^2$	$>$	$6x$
17)	$x^3 + 1$	$<$	$-3x^2 - 3x$	18)	$x^3 - 6x^2$	$\geq$	$8 - 12x$
19)	$9x^2$	$\geq$	$-6x - 1$	20)	$4x^2$	$<$	25
21)	x^2	$>$	16	22)	$9x$	$\geq$	$16x^2$
23)	$\frac{2x + 1}{2x - 1}$	$<$	0	24)	$\frac{3x + x^2}{x - 1}$	$>$	0
25)	$\frac{x + 2}{(x - 3)^2}$	$\geq$	0	26)	$\frac{5x + 3}{8 - 5x}$	$>$	0
27)	$\frac{24x + 12}{8x - 16}$	$\leq$	0	28)	$\frac{7x - 2}{\frac{1}{3}x + 1}$	$\geq$	0
29)	$\frac{5 - 11x^2}{5 - x}$	$\leq$	$11x - 3$	30)	$\frac{x^2 - 1}{(x + 2)^2}$	$\geq$	1
31)	$\frac{2}{x + 1}$	$>$	$\frac{1}{x}$	32)	$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$	$\leq$	$\frac{x^2 - 16}{x^2 + 6x + 8}$

28 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations paramétriques selon le modèle suivant.*

Dans une inéquation, si pour isoler x *il faut diviser les deux membres par un facteur littéral, on envisage trois cas selon que ce facteur est strictement positif, strictement négatif ou nul.*

$(m-1)x + 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-1)x \geq -3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \text{ et } m > 1 \text{ et } x \geq \frac{-3}{m-1} \text{ et } x \in [\frac{-3}{m-1}; +\infty[\\ \text{ou} \\ m - 1 < 0 \text{ et } m < 1 \text{ et } x \leq \frac{-3}{m-1} \text{ et } x \in]-\infty; \frac{-3}{m-1}] \\ \text{ou} \\ m - 1 = 0 \text{ et } m = 1 \text{ et } 0x \geq -3 \text{ et } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1)	$(m+2)x$	$\geq$	4	2)	$3x + 5$	$\leq$	$-2mx$
3)	$(4 + 3m)x$	$>$	0	4)	$x(1 + m^2) + 1$	$\geq$	0
5)	$2x + 1$	$\leq$	$3m - 2$	6)	$mx + 1$	$\geq$	$-1 - x$
7)	$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}$	$>$	$-mx$	8)	$x(3m + 1)$	$<$	$x(2 - 4m)$
9)	$(m + 4)x$	$\geq$	$mx - 3 + 4x$	10)	$m(x - 2) - m^2$	$\leq$	0
11)	$mx - m^2$	$>$	$2x - 2m$	12)	$mx - 2$	$<$	$m(m + 3) - x$
13)	$\frac{x}{m - 1} + m + 1$	$<$	x	14)	$3x - m$	$\geq$	$\frac{3x + 1}{m + 2}$

29 *Déterminer le domaine de définition des fonctions rationnelles* f *données par leurs images* f(x) *et étudier leurs signes, c'est-à-dire donner l'ensemble des* x *tels que* $f(x) \geq 0$ *ou* $f(x) \leq 0$.

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}$ 2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ 3) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ 5) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x-3}$ 6) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}$

7) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x+5}{\frac{1}{4}x+6}$ 8) $f(x) = \dfrac{7x+5x^2}{x^3+2x}$ 9) $f(x) = \dfrac{2x^2+11x-21}{x+1}$

Définition 8 La valeur absolue est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$|\ldots| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x| \text{ avec } \begin{cases} x \geq 0 \text{ et } |x| = x \\ \text{ou} \\ x < 0 \text{ et } |x| = -x \end{cases}$$

Exercices

30 Démontrer que l'on a

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|xy| = |x|\cdot|y|$

c) $|x| \geq y > 0 \Leftrightarrow x \leq -y$ ou $x \geq y$

d) $|x| \leq y$ et $y > 0 \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$

e) $|x+y| \leq |x| + |y|$

f) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$

g) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

31 Résoudre dans $\mathbb{R}$*, selon le modèle suivant, les équations et inéquations proposées.*

1) Calculer les racines de chaque valeur absolue.

2) Classer les racines.

3) Transformer les valeurs absolues dans les intervalles fixés par les racines.

$$|x+2| - 3|x-1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ et } -x-2+3(x-1) = 0 \text{ et } x = \frac{5}{2} \\ \text{ou} \\ -2 \leq x < 1 \text{ et } x+2+3(x-1) = 0 \text{ et } x = \frac{1}{4} \\ \text{ou} \\ x \geq 1 \text{ et } x+2-3(x-1) = 0 \text{ et } x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right\}$$

1) $|x+4| = 0$ 2) $|x+4| < 0$

3) $|x+4| \geq 3$ 4) $|2x-1| \leq 2$

5)	$\left\lvert\frac{1}{3}x+6\right\rvert$	$= 0$		6)	$\left\lvert-\frac{1}{4}x+7\right\rvert$	$= 0$
7)	$\left\lvert\frac{2}{3}x-1\right\rvert$	$= 1$		8)	$\left\lvert 1-\frac{3}{4}x\right\rvert$	≤ 1
9)	$\lvert 2x+3\rvert - 1$	≤ 0		10)	$2\lvert x+1\rvert - \lvert 2-x\rvert$	$= 0$
11)	$\lvert 3x-9\rvert$	$\geq -5x$		12)	$2\lvert x\rvert - \lvert x+1\rvert$	< 0
13)	$\dfrac{x+2}{\lvert x-1\rvert}$	≥ 0		14)	$\lvert x+2\rvert + \lvert x+3\rvert$	$\geq 5-\lvert x+1\rvert$
15)	$(m-1)\lvert x+1\rvert$	$= 0$		16)	$2\lvert x-1\rvert - \lvert 4x+3\rvert$	$= \lvert 5-2x\rvert$
17)	$\lvert x+1\rvert\cdot\lvert x-2\rvert$	≤ 0		18)	$\dfrac{\lvert x+3\rvert}{x-2}$	≤ 0
19)	$ax+\lvert x-1\rvert$	$= 0$		20)	$\lvert 2x+1\rvert - 4x$	$= 7$
21)	$\lvert\,\lvert x+1\rvert + 2\rvert$	$= 1$		22)	$\lvert\,\lvert x+1\rvert - \lvert x-3\rvert\,\rvert$	$= \lvert 2-x\rvert$